**«Решение логических уравнений»**

*Учитель информатики МАОУ «Лицей № 29»*
*Забавникова Евгения Александровна*

При подготовке к ЕГЭ номер 23 по теме: «Решение систем логических уравнений» является одним из самых сложных заданий. Оно относится к повышенному уровню сложности и на его выполнение отводится 15 - 20 минут.

При подготовке к выполнению этого задания у учащихся должен быть большой багаж знаний из области математической логики: знать основные логические операции, правила замены импликации и эквивалентности, правила преобразования логических выражений (законы алгебры логики).

Конечно, прежде чем начинать разбирать решение систем логических уравнений, необходимо разобраться в решении одного уравнения. Начнем знакомиться с решением уравнений от простых к сложным.

**Пример 1.** Найти все решения уравнения.

$$\left(\overline{A\wedge B}\vee C\right) \to (\bar{A}\wedge\bar{B}\vee D) = 1$$

<u>*1 способ решения:*</u> упростить выражение (и использовать удобные для себя знаки логических операций). Заменяя импликацию по формуле: $A \to B = \bar{A} + B$, получаем:

$$\overline{\bar{A} + \bar{B} + C} + \bar{A}\cdot\bar{B} + D = 1$$

Используя закон де Моргана:

$$A\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot\bar{B} + D = 1$$

Если логическая сумма равна 1, то хотя бы одно слагаемое равно 1 (или три одновременно). Первое слагаемое равно 1 при A=1, B=1, C=0, D – любое. Получаем 2 решения:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

Второе слагаемое равно 1 при A=0, B=0, а C и D – любые значения. Получается 4 решения:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

Третье слагаемое равно 1 при D=1, а A, B и C – любые. Следовательно получается 8 решений:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** | **1** |
| **0** | **0** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| **1** | **1** | **0** | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Но три выделенных в таблице решения повторяются с ранее полученными, поэтому их необходимо исключить. Третье слагаемое в итоге дает нам 5 решений.

2 + 4 + 5 = 11.

Ответ: Данное уравнение имеет 11 решений.

<u>*2 способ решения:*</u> Можно найти количество решений «обратного» уравнения с 0 в правой части и вычесть его из общего количества решений (т.к. у нас четыре переменных, то общее количество комбинаций 4-х переменных равно 16).

$$\left(\overline{A\wedge B}\vee C\right) \to (\bar{A}\wedge\bar{B}\vee D) = 0$$

Импликация ложна только тогда, когда первое выражение истинно, а второе – ложно. Поэтому получаем:

$\bar{A}+\bar{B}+C=1$ **и** $\bar{A}\cdot\bar{B}+D=0$ (**и** говорит об одновременном выполнении данных уравнений)

Подбираем решения второго уравнения с учетом первого (D всегда равно 0, рассматриваем решения сначала когда A=0, затем A=1):

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Получили 5 решений. 16-5=11

Ответ: Данное уравнение имеет 11 решений.

<u>*3 способ решения:*</u> Построить таблицу истинности данного выражения и найти все варианты при которых оно равно 1. Однако, для данного выражения таблица истинности содержит уже 16 строк, а если переменных будет больше, то строить такую таблицу достаточно трудоемкий процесс.

**Пример 2.** Найти количество решений уравнения:

$$(A\to B)\cdot(B\to C)\cdot(C\to D)\cdot(D\to E)\cdot(E\to F)\cdot(F\to G)=1$$

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда все множители истинны. Импликация ложно только в одном случае, когда из истины следует ложь, т.е. импликация истинна в трех случаях:

| X | Y | X→Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

X≤Y

В решении заданного уравнения не может встречаться последовательность 10, так как тогда все выражение будет равно 0. Каждая логическая переменная, которая входит в наше уравнение может принимать значение 1 или 0, то можно сразу представить решение в виде 7-битной цепочки:

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ответ: Данное уравнение имеет 8 решений.

**Пример 3.** Сколько различных решений имеет уравнение:

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G = 1?$$

Чтобы решить это уравнение, нужно познакомится с методом отображения для решения уравнений.

Изучала и осваивала метод отображения для систем логических уравнений, используя материал Мирончик Ел.А. и Мирончик Ек.А. МБ НОУ «Лицей № 111», г. Новокузнецк. Этот материал можно найти на сайте Полякова К.Ю. подготовка к ЕГЭ:

http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm

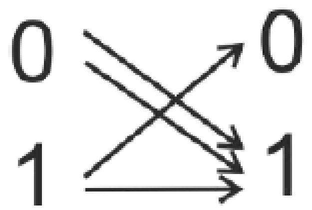
Сначала с детьми разбираем решение уравнений методом отображения, а потом уже переходим на решению систем логических уравнений методом отображения.

При решении данного уравнения, мы видим, что те результаты, которые получатся при первой импликации, должны отображаться на последующие решения. Поэтому в этом методе самое главное построить схему отображения одних решений на другие. Рассмотрим сначала таблицу истинности для импликации:

| A | B | A→B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 |

Построим схему отображения:

A A→B




A→B истинна в трех случаях (удвоенное количество решений из 0 на предыдущем шаге и одно количество решений из 1 на предыдущем шаге) и ложна в одном случае (одно количество решений из 1 на предыдущем шаге).

Далее строится таблица для отображения количества решений данного уравнения с отображением всех переменных.

В первом столбике, мы указываем значения решений (истина и ложь), во втором столбике, мы говорим, что есть одно решение, когда А ложно и одно решение, когда А истинно. Используя схему отображения заполняем таблицу:

| | A | $A \to B$ | $B \to C$ | $C \to D$ | $D \to E$ | $E \to F$ | $F \to G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | 43 |
| 1 | 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | 43 | 85 |

Если в исходном уравнении добавить еще одну переменную, то таблица увеличится еще на один столбик, который будет вычисляться по тем же правилам.

Ответ: 85 решений.

Метод отображения, на мой взгляд, является универсальным способом решения логических уравнений. Советую изучить его с помощью материала, представленного на сайте. Мы с учащимися обязательно разбираем все примеры решения уравнений методом отображения и потом переходим к решению систем. Авторы этого метода предлагают презентацию «Системы логических уравнений», которую можно использовать для объяснения материала. Особенно удобно решаются этим методом системы с дополнительными условиями.

Рекомендую подобрать системы одинаковых уравнений и на этих примерах отработать метод отображений, а затем разобрать системы с дополнительными условиями.

Рассмотрим решение нескольких однотипных систем.

**Пример 4.** Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\mathbf{(x1 \land y1) \equiv (\neg x2 \lor \neg y2)}$$
$$\mathbf{(x2 \land y2) \equiv (\neg x3 \lor \neg y3)}$$
$$\mathbf{\ldots}$$
$$\mathbf{(x5 \land y5) \equiv (\neg x6 \lor \neg y6)}$$

где x1, …, x6, y1, …, y6, – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Познакомившись с системой, мы видим, что решения первого уравнения отображаются на второе и т.д. (т.е. от данных x1y1 мы переходим к x2y2, а от x2y2 к x3y3 и т.д.). Таблицу, которую строят при объяснении метода отображений, на мой взгляд, использовать не обязательно. Это рассуждения, которые мы проводим, чтобы построить схему отображения.

Построим схему отображения (это самое основное действие!):

x1y1 x2y2
0 0 0 0 F(00)=F(11)
0 1 0 1 F(01)=F(11)
1 0 1 0 F(10)=F(11)
1 1 1 1 F(11)=F(00)+F(01)+F(10)

Выписать значение функции F(), вычисляющее количество решений отображенных на каждом шаге, обязательно. Это позволяет не запутаться при заполнении таблицы.

| | x1y1 | x2y2 | x3y3 | x4y4 | x5y5 | x6y6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| 01 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| 10 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| 11 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 | 27 |

9+9+9+27=54

Ответ: 54 решения.

Метод отображений представляет собой строгий и четкий алгоритм, в котором главное правильно проработать схему отображения и аккуратно провести расчеты. При увеличении количества неизвестных (т.е. при добавлении еще уравнений такого же типа) алгоритм не усложняется. Просто необходимо добавить еще столбцы в таблицу и продолжить ее заполнение, в соответствии с функциями.

**Пример 5.** Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\mathbf{X1 \lor X2 \land X3 = 1}$$
$$\mathbf{X2 \lor X3 \land X4 = 1}$$
$$\mathbf{...}$$
$$\mathbf{X8 \lor X9 \land X10 = 1}$$

где x1, x2, …, x10 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Здесь переход от одного уравнения к другому происходит от x1x2 к x2x3.

Строим схему отображения:

x1x2 x2x3
0 0 0 0 F(00)=F(10)
0 1 0 1 F(01)=F(10)
1 0 1 0 F(10)=F(11)
1 1 1 1 F(11)=F(01)+F(11)

Строим таблицу:

| | x1x2 | x2x3 | x3x4 | x4x5 | x5x6 | x6x7 | x7x8 | x8x9 | x9x10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 |
| 10 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 | 19 |
| 11 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 | 19 | 28 |

13+13+19+28=73

Ответ: 73 решения.

Есть однотипные системы, но в которых происходит чередование значений уравнений истина и ложь. В таких системах необходимо строить две схемы отображений: для истины и для лжи, а при заполнении таблицы чередовать правила использования функций.

**Пример 6.** Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2) + (x_2 \cdot x_3) = 1 \\ (x_2 \to x_3) + (x_3 \cdot x_4) = 0 \\ (x_3 \to x_4) + (x_4 \cdot x_5) = 1 \\ \qquad \dots \\ (x_8 \to x_9) + (x_9 \cdot x_{10}) = 0 \end{cases}$$

где x1, x2, …, x10 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Построим схему отображения для истины:

x1x2 x2x3
0 0 0 0 F(00)=F(00)
0 1 0 1 F(01)=F(00)
1 0 1 0 F(10)=F(01)+F(11)
1 1 1 1 F(11)=F(01)+F(11)

Построим схему отображения для лжи:

x1x2 x2x3
0 0 0 0 F(00)=F(10)
0 1 0 1 F(01)=F(10)
1 0 1 0
1 1 1 1

Строим таблицу:

| | x1x2 | x2x3 | x3x4 | x4x5 | x5x6 | x6x7 | x7x8 | x8x9 | x9x10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 01 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 10 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 11 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

Ответ: 4 решения.

Конечно, метод отображений не является универсальным способом решения систем логических уравнений. Есть уравнения, в которых очень хорошо можно построить битовые цепочки правильных ответов и нужно знакомиться с разнообразными методами решения систем логических уравнений. Но я рекомендую использовать этот метод, для более аккуратного решения одного из самых сложнейших заданий в ЕГЭ. Хочется сказать большое спасибо, разработчикам этого метода и также Полякову К.Ю., который распространяет этот метод с помощью своего сайта и предоставляет большой банк заданий с разбором для подготовки к ЕГЭ.

Источники:

1. Сайт «Поляков К.Ю. Методические материалы и программное обеспечение». http://kpolyakov.spb.ru/index.htm
2. Методические разработки «Решение логических уравнений» и «Решение систем логических уравнений» Мирончик Ел.А. и Мирончик Ек.А. МБ НОУ «Лицей № 111», г. Новокузнецк.